

# Kochsche Schneeflocke

## – Lösungshinweis –

Über den mittleren Dritteln der Seiten eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge  $a > 0$  wird je ein gleichseitiges Dreieck errichtet.<sup>1</sup> Dieser Schritt wird wiederholt, indem über jedem mittleren Drittel

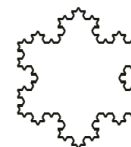
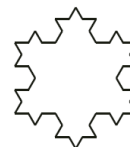
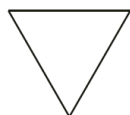


Abbildung 1: Ganz links ist das Ausgangsdreieck abgebildet; danach kommen der 1., 2. und 3. Iterationsschritt der Kochschen Schneeflocke<sup>1</sup>

der Seiten des so entstandenen Polygons jeweils wieder ein gleichseitiges Dreieck errichtet wird. Die *Kochsche Schneeflocke*<sup>2</sup> entsteht als Limes, wenn man diese Vorschrift unendlich oft wiederholt. Der dabei entstehende Flächeninhalt der Kochschen Schneeflocke ist endlich.



**Wie groß ist der Flächeninhalt der Kochschen Schneeflocke?**

**Aufgabe 1:** Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Kochschen Schneeflocke nach dem 1. Iterationsschritt, wenn das Ausgangsdreieck eine Seitenlänge von  $a > 0$  besitzt.

**Hinweis:** Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge  $a$  ist  $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

**Aufgabe 2:** Um den Grenzwert des Flächeninhalts der Kochschen Schneeflocke zu bestimmen, wird im Folgenden nur eine Seite des Ausgangsdreiecks betrachtet.<sup>3</sup>



Abbildung 2: Eine Seite der Kochschen Schneeflocke nach dem 2. (links) bzw. 3. (rechts) Iterationsschritt

- Bestimmen Sie die Anzahl an gleichseitigen Dreiecken, die im  $k$ -ten Iterationsschritt hinzugefügt werden. Begründen Sie Ihre Antwort.
- Bestimmen Sie den Flächeninhalt, den ein neu hinzugefügtes gleichseitiges Dreieck im  $k$ -ten Iterationsschritt an einer Seite besitzt.
- Bestimmen Sie den Flächeninhalt, der im  $k$ -ten Iterationsschritt an einer Seite hinzukommt.

<sup>1</sup> Tretter, C. (2013). *Analysis I*. Springer Basel. <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0349-6>, S. 69

<sup>2</sup> Diese ist benannt nach dem schwedischen Mathematiker Helge von Koch und ist eines der ersten Beispiele für ein „Fraktal“.

<sup>3</sup> Eine solche Seite wird auch als *Koch-Kurve* bezeichnet. Zu Beginn Ihrer Entdeckung auch (ironisch) als „Monsterkurve“ betitelt.

**Aufgabe 3:** Mit den Ergebnissen aus Aufgabe 2 soll nun die Hauptfrage beantwortet werden.

- a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt, der insgesamt bis zum einschließlich  $n$ -ten Iterationsschritt an einer Seite hinzukommt.
- b) Berechnen Sie den Flächeninhalt, der an einer Seite der Kochschen Schneeflocke im Vergleich zum Ausgangsdreieck hinzukommt, d.h. für  $n \rightarrow \infty$ .

**Hinweis:** Geometrische Reihe

- c) Berechnen Sie den gesamten Flächeninhalt der Kochschen Schneeflocke.

